Gama Exponenciada Estendida de Marshall Olkin

Guilherme Aguilar[1], Fernando Antonio Moala[2] e Thaís Carolina S. dos Reis[3]

[1, 3] Mestrando em Matemática Aplicada e Computacional, FCT/Unesp
[2] Professor no Departamento de Estatística, FCT/Unesp

RESUMO

Neste trabalho é apresentada a construção de uma nova distribuição por meio do método de adição de um parâmetro, proposto por [3], onde surgiu a Gama Exponenciada estendida de Marshall Olkin. São exibidos também alguns resultados obtidos da nova distribuição como n-ésimo momento, função geradora de momentos, assimetria e curtose, ordenação estocástica e o parâmetro stress-strength. Por último também foi realizado uma estimaçãos dos parâmetros utilizando o estimador de máxima verossimilhança e um estimador bayesiano.
Palavras chave: Gama Exponenciada, Marshall Olkin, Simulação.

1 INTRODUÇÃO

Devido ao surgimento de diferentes métodos de obtenção de novas distribuições, tem se tornado comum nos últimos anos os estudos sobre novas distribuições de probabilidades. A distribuição Gama Exponenciada foi proposta por [1], onde o modelo é obtido através do método $F*(x) = [F(x)]^{\theta}$, onde $F(x)$ é a distribuição base, no caso em estudo, a distribuição Gama e θ (parâmetro forma) é um número real e positivo. Tal distribuição possui a flexibilidade suficiente para modelar taxas de falha monótonas e não monótonas [2]. [3] apresentaram um método para obter generalizações de distribuições de probabilidade assumindo um novo parâmetro, $\alpha > 0$, em uma família de distribuições. Deste modo, utilizando o método proposto por [3] e a distribuição proposta por [1] chegou-se no modelo em estudo neste trabalho, a Gama Exponenciada Estendida de Marshall Olkin (GEEMO). Muitas vezes, a obtenção de uma nova distribuição pode ser vantajosa devida a suas diferentes formas de sua curva de risco. Com o auxílio dos softwares *Maple* e *R*, chegou-se nos em alguns resultados probabilísticos da nova distribuição como n-ésimo momento, função geradora de momentos, assimetria, curtose e confiabilidade. Também foram realizadas simulações para comparar estimadores.

2 CRIAÇÃO DO MODELO

Para a criação da nova distribuição de probabilidade, foi utilizado no início o método da composição. é um caso particular da extensão de Marshall Olkin. A distribuição estendida de Marshall Olkin é obtida da seguinte maneira: se for feito uma reparametrização fazendo $\alpha = \frac{1}{\lambda} \geq 1, (0 < \lambda < 1)$

$$\begin{aligned} f(x|\theta,\alpha) &= \frac{\alpha f(x|\theta)}{\left[1-(1-\alpha)S(x|\theta)\right]^2} \\ &= \frac{\alpha\theta x e^{-x}(1-e^{-x}(x+1))^{\theta-1}}{\left[1-(1-\alpha)(1-(1-e^{-x}(x+1))^{\theta})\right]^2}, \quad 0<x, 0<\alpha, 0<\theta \qquad (1) \end{aligned}$$

A partir da figura 1 é possível observar o comportamento da função densidade (lado esquerdo) e da função risco (lado direito), que é a divisão entre a densidade e a função de sobrevivência da distribuição.

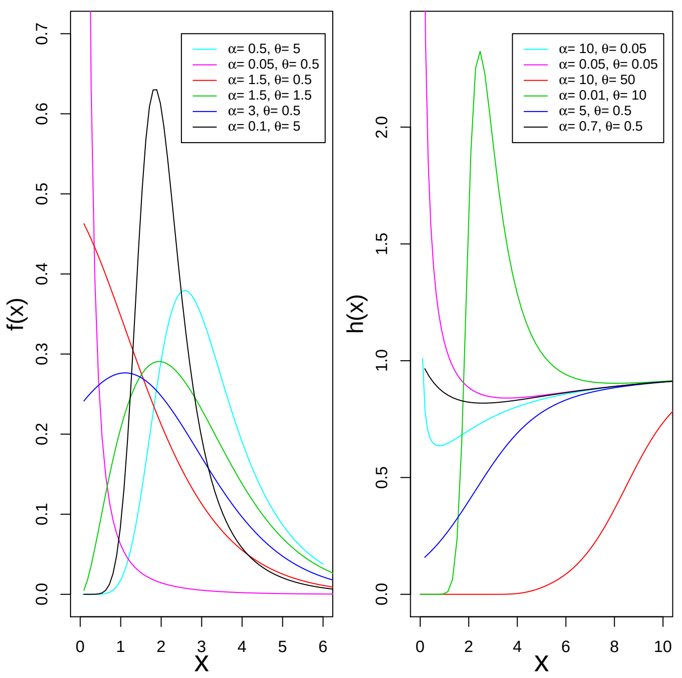

Figura 1: Gráfico da função densidade e da função risco

Existe um ganho em relação em relação ao ganho aos tipos de curvas que esta nova distribuição apresenta, uma de suas vantagens é a maior facilidade de se trabalhar com ela, pois possui apenas dois parâmetros.

3 N-ÉSIMO MOMENTO E FGM

Os momentos são muito importantes para a Estatística, pois podem caracterizar as distribuições de probabilidade. Para chegar numa forma de encontrar expressões analíticas para tal propriedade, foi necessário utilizar expansões. Desta forma foi obtido a seguinte expressão do n-ésimo momento

$$E(x^n) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} \binom{\theta - 1 + \theta j}{i} \binom{i}{k} (-1)^{i+j}(j+1)\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^j \theta \times (1+i)^{-2-k-n}\Gamma(2+k+n) \tag{2}$$

Em teoria da probabilidade e estatística, a função geradora de momentos (fgm) de uma variável aleatória é uma especificação alternativa de sua distribuição de probabilidade. Seja X uma variável aleatória. A função geradora de momentos da variável X é definida como sendo a função:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n E(X^n)}{n!} \tag{3}$$

4 ASSIMETRIA E CURTOSE

A tarefa fundamental em muitas análises estatísticas é caracterizar a localização e variabilidade de um conjunto de dados. A caracterização adicional dos dados inclui assimetria e curtose. Medidas de assimetria e curtose são muitas vezes utilizados para descrever características da forma de uma distribuição.

A figura 2 mostra que conforme os valores dos parâmetros vão diminuindo a assimetria e curtose vão aumentando, isso ocorre mais rapidamente para a curtose.

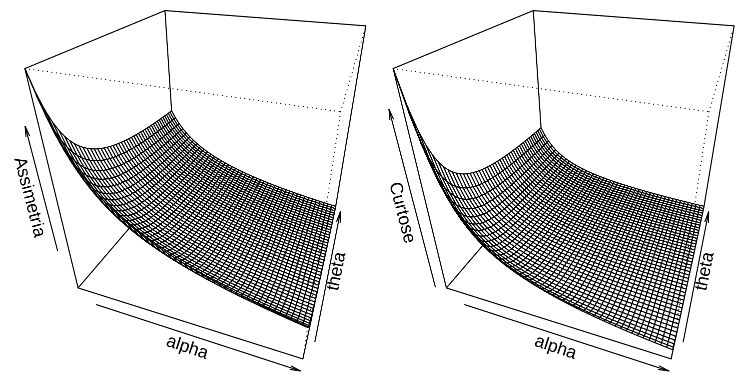

Figura 2: Gráfico da Assimetria e Curtose.

5 Confiabilidade

Trabalhos que envolvem modelos de resistência-tensão possuem o interesse na estimação da confiabilidade denotada por $R = P(X_2 < X_1)$, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes que pertencem à mesma família univariada de distribuições. Considerando X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes da distribuição GEEMO com parâmetros (α_1, θ_1) e (α_2, θ_2) respectivamente, fazendo $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, foi obtido:

$$R = P(X_2 < X_1) = \frac{\alpha_1 \left(\alpha_2 \ln\left(\alpha_2\right) - \alpha_2 \ln\left(\alpha_1\right) + \alpha_1 - \alpha_2\right)}{\left(-\alpha_2 + \alpha_1\right)^2} \tag{4}$$

6 SIMULAÇÃO

Foram geradas 1000 amostras da distribuição GEEMO, para três diferentes tamanhos amostrais, sendo eles $n = 20$, 60 e 100. Para o caso bayesiano foram utilizadas 20000 iterações para cada amostra. Os valores utilizados para os parâmetros foram $\alpha = 0.5$ e $\theta = 1.5$.

Tabela 1: Vícios, erro padrão médio e a diferença absoluta máxima dos estimadores

		$BIAS\ \alpha$	$BIAS\ \theta$	$RMSE\ \alpha$	$RMSE\ \theta$	$Dmax$
EMV	n=20	0.3176	0.4927	0.5466	0.6738	0.0975
Bayes		0.2189	0.4553	0.2928	0.5898	0.1052
EMV	n=60	0.1794	0.2683	0.2397	0.3464	0.0569
Bayes		0.1519	0.2525	0.2044	0.3215	0.0518
EMV	n=100	0.1356	0.1972	0.1777	0.2482	0.0432
Bayes		0.1252	0.1971	0.1634	0.2441	0.0392

7 CONCLUSÃO

Foi proposta uma nova distribuição referente à Gama Exponenciada apresentada por [1], foi mostrado sua flexibilidade em relação à função risco através de gráficos, também foi estudado algumas de suas propriedades e feito um estudo de simulação com o propósito de comparar estimadores.

Referências

[1] Ramesh C Gupta, Pushpa L Gupta, and Rameshwar D Gupta. Modeling failure time data by lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 27(4):887–904, 1998.

[2] Shawky Ahmed Ibrahim and Rana Ali Bakoban. Certain characterizations of the exponentiated gamma distribution. *Journal of Statistics Science*, 3(2), 2011.

[3] Albert W Marshall and Ingram Olkin. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. *Biometrika*, 84(3):641–652, 1997.