ESTUDO DE SIMULAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL PONDERADA

Jean Carlos Cardoso[1] e Josmar Mazucheli[2]

[1]Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Estatística, Maringá, PR, Brasil. E-mail: jeancarlos.card@gmail.com
[2]Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Estatística, Maringá, PR, Brasil. E-mail: jmazucheli@uem.br

RESUMO

Nesse trabalho, avaliamos, via simulação Monte Carlo, o comportamento, em teremos de vícios e erros-quadrático médio da distribuição exponencial ponderada proposta por Grupta e Kundu (2009). Este novo modelo de distribuição tem uma função densidade de probabilidade (fdp) cuja forma é muito próxima à forma da fdp da Weibull, da gama ou da distribuição exponencial generalizada. Além disso, pode ser usado como uma alternativa para qualquer uma destas distribuicões. É observado que a função de distribuição EP tem uma forma compacta e todos os momentos podem ser calculados de forma explícita. Portanto, méedia, variância, assimetria, curtose, coeficiente de varição, função de risco e medida de tempo de vida restante, podem ser calculadas explicitamente. Além dessas vantagens, o estudo de simulação mostrou que para amostras relativamente grandes o vício e p REQM tendem a zero.
Palavras chave: Simulação Monte Carlo, Distribuição Exponencial Ponderada, Estimação.

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a literatura, diferentes métodos podem ser usados para introduzir um parametro de forma em uma distribuição. Gupta e Kundu (2009), utilizaram a ideia de Azzalini para a adição de um novo parâmetro de forma à distribuição exponencial, o que resultou em uma nova classe de distribuições nomeada *distribuições exponenciais ponderadas*. O novo parâmetro governa a forma da função densidade de probabilidade da distribuição exponencial ponderada fazendo com que a mesma adote uma similaridade com as funções densidades de algumas generalizações da distribuição exponencial, tais como: a distribuição gama, a distribuição Weibull e a distribuição exponencial generalizada.

2 A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL PONDERADA E SUAS PROPRIEDADES

Dizemos que uma variável aleatória X segue uma distribuição exponencial ponderada com parâmetros de forma, $\alpha > 0$, e escala, $\lambda > 0$, se sua função densidade é escrita como:

$$f(x \mid \alpha, \lambda) = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\alpha\lambda x}); \quad x > 0. \tag{1}$$

Neste caso, $X \sim EP(\alpha, \lambda)$. A expressão descrita em (1) pode ser obtida também da soma de duas distribuições exponenciais $U \sim \exp(\lambda)$ e $V \sim \exp(\lambda(1 + \alpha))$. A representação estocástica de $X = U + V$ caracteriza a distribuição exponencial ponderada.

Sendo X uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial ponderada, o comportamento de sua função densidade de probabilidade é unimodal com moda igual a ${}^{ln(1+\alpha)}/_{\lambda\alpha}$.

Temos que se $\alpha \to 0$, a expressão (1) converge para uma distribuição gama com parâmetro de forma 2 e parâmetro de escala λ. Se $\alpha \to \infty$, então (1) converge para a distribuição exponencial com parâmetro λ e, se $\alpha = 1$, obtém-se a distribuição exponencial generalizada com parâmetro de forma 2.

2.1 FUNÇÃO DE RISCO

A função de risco da distribuição exponencial ponderada é caracterizada por:

$$h(x \mid \alpha\lambda) = (\alpha + 1)\lambda \frac{1 - e^{-\alpha\lambda x}}{\alpha + 1 - e^{-\alpha\lambda x}}. \tag{2}$$

Observe que, para quaisquer valores de $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, a expressão (2) é crescente com $h(0, \alpha, \lambda) = 0$ e $h(\infty, \alpha, \lambda) = \lambda$.

2.2 MOMENTOS E CUMULANTES

A função geradora de momentos é expressa por:

$$M(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \frac{\lambda^2(\alpha + 1)}{(\alpha\lambda + \lambda - t)(\lambda - t)} \quad \text{para } t < \lambda. \tag{3}$$

De (3), obtém que a esperança e variância são dadas, respectivamente, por:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\alpha+1)} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2(\alpha+1)^2}. \tag{4}$$

Além disso, a função geradora de cumulantes é escrita na forma:

$$\ln M(t) = \ln\left(\frac{\lambda}{t}\right) + \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha\lambda+\lambda-t}\right). \tag{5}$$

3 ESTIMAÇÃO VIA MLE

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ uma amostra aleatória i.i.d. de tamanho n da distribuição exponencial ponderada com parâmetros α, λ e densidade dada por (1). O logaritmo da função de verossimilhança é descrito por:

$$\ell(\alpha, \lambda \mid x) = n \ln\left[\frac{(\alpha+1)\,\lambda}{\alpha}\right] - \lambda n \overline{x} + \sum_{x=1}^{n} \ln\left(1 - e^{-\alpha\lambda x_i}\right), \tag{6}$$

em que $\overline{x}$ é a média amostral. Assim, de (6), obtém-se que o estimador de máxima verossimilhança de λ é descrito por:

$$\widehat{\lambda} = \frac{\widehat{\alpha}+2}{(\widehat{\alpha}+1)\overline{x}} \tag{7}$$

em que o estimador de máxima verossimilhança de α é $\widehat{\alpha}$ cuja forma não é explícita.

4 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Para o estudo de simulação, foi considerado tamanhos amostrais $25, 50, \ldots 200$ com passo $n = 25$ e todas as possíveis combinações $\alpha \times \lambda$, em que $\alpha = 0.1, 0.5, 1$ e $\lambda = 0.4, 0.8, 1.2$, dos parâmetros α e λ. Para cada combinação (n, α, λ), foram gerados $B = 10000$ valores pseudo-aleatórios de $X = U + V$ em que $U \sim \exp(\lambda)$ e $V \sim \exp(\lambda(1+\alpha))$, e, calculado o vício e a raíz do erro quadrático médio (REQM) descritos, respectivamente, por:

$$\text{Vício}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\widehat{\theta}_i - \theta_i) \quad \text{e} \quad \text{REQM}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\widehat{\theta}_i - \theta_i)^2$$

em que $\theta = (\alpha, \lambda)$ e $B = 10000$. Os resultados do estudo são ilustrados nas Figuras 1 e 2.

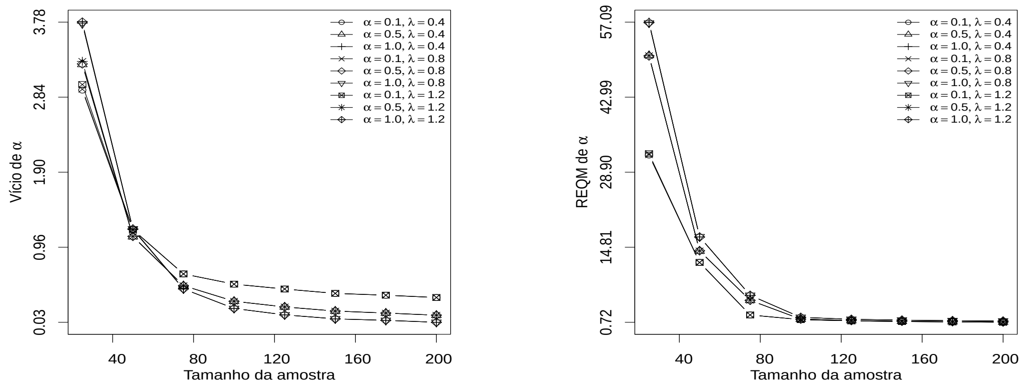

Figura 1: Vício de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ versus n.

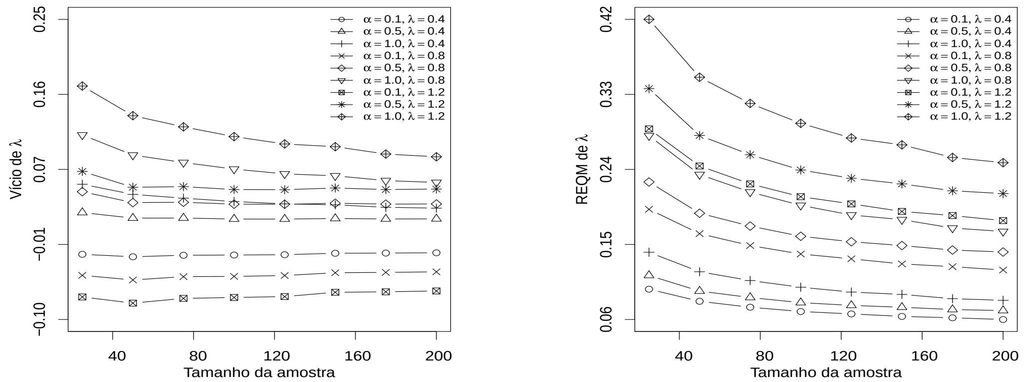

Figura 2: $REQM$ de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\lambda}$ versus n.

5 CONCLUSÃO

A partir do estudo realiazado, pode-se notar em todos os cenários considerados que os vícios estimados, tanto de $\widehat{\lambda}$ quanto de $\widehat{\alpha}$, são positivos. Além disso, a magnitude tanto do vício quanto do REQM estimados de $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\lambda}$ convergem para zero a medida que o tamanho amostral aumenta. Por fim, pode-se notar que o vício estimado de $\widehat{\alpha}$ para o novo parâmetro α assume valores baixos para amostras maiores do que 40 e seu REQM estimado tende a ser baixo para tamanhos amostrais superiores a 80. Ou seja, conclui-se que a adição do novo parâmetro só oferece vantagem quando o tamanho amostral é relativamente grande, implicando uma limitação para o uso da distribuição. Porém, esta nova distribuição pode oferecer melhores ajustes se comparada aos modelos clássicos devido à versatilidade de sua forma.

Referências

[1] ALQALLAF, Fatemah; GHITANY, M. E.; AGOSTINELLI, Claudio. **Weighted exponential distribution: Different methods of estimations.** Applied Math. Inform. Sci, v. 9, p. 1167-1173, 2015.

[2] GUPTA, Rameshwar D; KUNDU, Debasis. **A new class of weighted exponential distribution.** Statistics, v. 43, n.6, 621-634, 2009.